$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n.\int_0^1\frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n\left[\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^n}-\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}\right]$$

$$I_n=\frac{1}{2^n}+2n\left[I_n-I_{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{1}{2^n}+2n.I_n-2n.I_{n+1}\Rightarrow 2n.I_{n+1}=\frac{1}{2^n}+(2n-1)I_n$$

d'où $I_{n+1}=\frac{1}{2.n}\left[\frac{1}{2^n}+(2n-1).I_n\right]$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-I_1\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$$

$$I_3=\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+3I_2)=\frac{3\pi}{32}-\frac{1}{8}$$

$$I_4=\frac{1}{6}(\frac{1}{8}-5.I_3)=\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{64}$$

III/ $J_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$

$J_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$; $n\geq 1$

1) a) pour n=0 : $J_0=\frac{\pi}{4}$

$$0\leq J_0\leq\frac{1}{1+2\times 0}=1$$

* pour $n\geq 1$

$0\leq t\leq 1\Rightarrow 0\leq t^2\leq 1\Rightarrow 1\leq 1+t^2\leq 2$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1\Rightarrow 0\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$$

$$\Rightarrow 0\leq\frac{t^{2n}}{1+t^2}\leq t^{2n}\Rightarrow 0\leq\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\leq\int_0^1 t^{2n}.dt$$

$$\Rightarrow 0\leq J_n\leq\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1\Rightarrow 0\leq J_n\leq\frac{1}{2n+1}$$

b) $0\leq J_n\leq\frac{1}{2n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ d'où $\lim_{n\to+\infty}J_n=0$

2) a) $J_{n+1}+J_n=\int_0^1\frac{t^{2n+2}+t^{2n}}{1+t^2}dt$

$$=\int_0^1\frac{t^{2n}(1+t^2)}{1+t^2}dt=\int_0^1 t^{2n}dt=\frac{1}{2n+1}$$

b) * $J_0=\frac{\pi}{4}$

* $J_1+J_0=1\Rightarrow J_1=1-\frac{\pi}{4}$

* $J_2+J_1=\frac{1}{3}\Rightarrow J_2=\frac{1}{3}-(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$

$J_3=\frac{13}{5}-\frac{\pi}{4}$

$J_4=\frac{\pi}{4}-\frac{156}{35}$

$J_5=\frac{1439}{315}-\frac{\pi}{4}$

3) $U_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{1+2n}$

a) $1=J_1+J_0$

$\frac{1}{3}=J_2+J_1$

$\frac{1}{5}=J_3+J_2$

$\frac{1}{7}=J_4+J_3$

.

.

$\frac{1}{2n+1}=J_{n+1}+J_n$

d'où

$$U_n=(J_1+J_0)-(J_2+J_1)+(J_3+J_2)+..+(-1)^n(J_{n+1}+J_n)$$

$$U_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.(J_k+J_{k+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k+\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_{k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}J_{k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kJ_k-\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^kJ_k$$

$$U_n=J_0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k.J_k-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^kJ_k+(-1)^{n+1}J_{n+1}\right)$$

$$U_n=J_0-(-1)^{n+1}J_{n+1}=J_0+(-1)^nJ_{n+1}$$

$$\Rightarrow(-1)^nJ_{n+1}=U_n-J_0\Rightarrow J_{n+1}=(-1)^n(U_n-J_0)$$

b) $|U_n-J_0|=|J_{n+1}|$

$\lim_{n\to+\infty}J_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}|J_{n+1}|=0$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(U_n-J_0)=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}U_n=J_0=\frac{\pi}{4}$$

Qarray.tn -Aqra Bech- Qarray.tn